



ce
pre
UNI

Trigonometría

✓ **ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRANGULAR**

**CICLO
PRE 2024 - I**



ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRANGULAR

ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE UN CUADRILÁTERO

En el cuadrilátero ABCD mostrado:

Sus lados son: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$

De longitudes: a , b , c y d ; respectivamente

Su perímetro es: $2p = a + b + c + d$

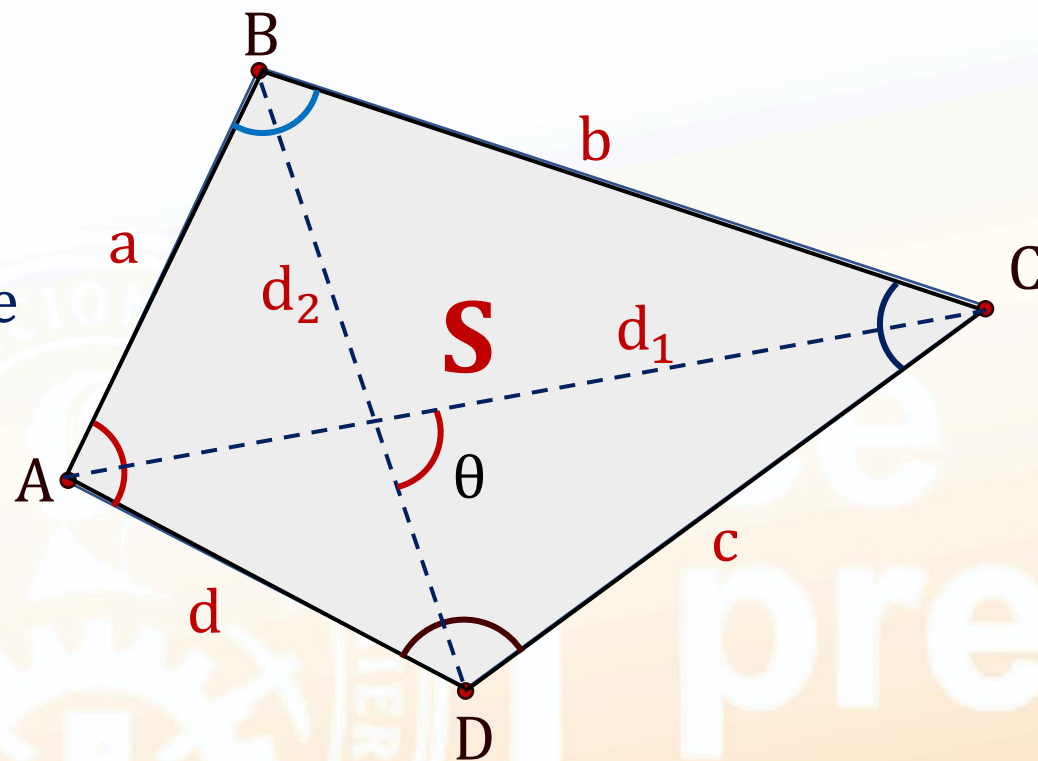
Sus ángulos interiores: A , B , C y D

Denotaremos al área de su región correspondiente: $S_{ABCD} = S$

Sus diagonales son: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Denotamos sus longitudes por: d_1 y d_2 respectivamente.

La medida del ángulo formado por las diagonales: θ



CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRANGULAR

A) CUADRILÁTERO CUALQUIERA

A.1) 1ra RELACIÓN

Utilizando los lados y los ángulos que forman

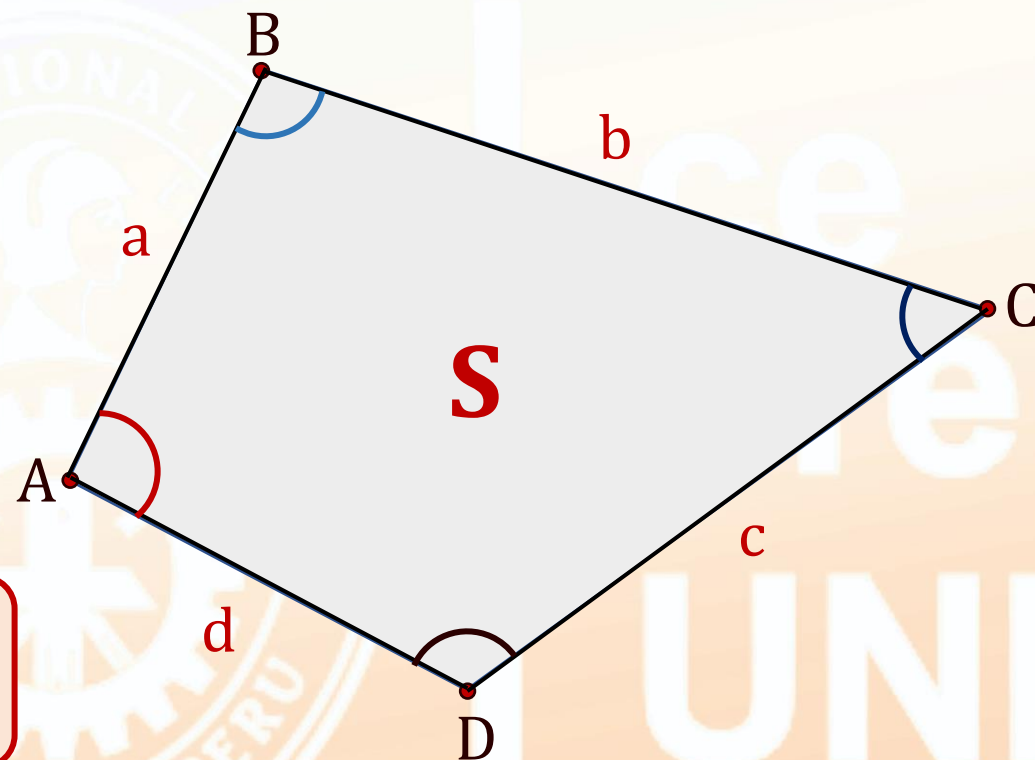
En el cuadrilátero ABCD mostrado:

El área **S** de su región correspondiente es igual a:

$$S = \frac{a \cdot d}{2} \text{sen}(A) + \frac{b \cdot c}{2} \text{sen}(C)$$

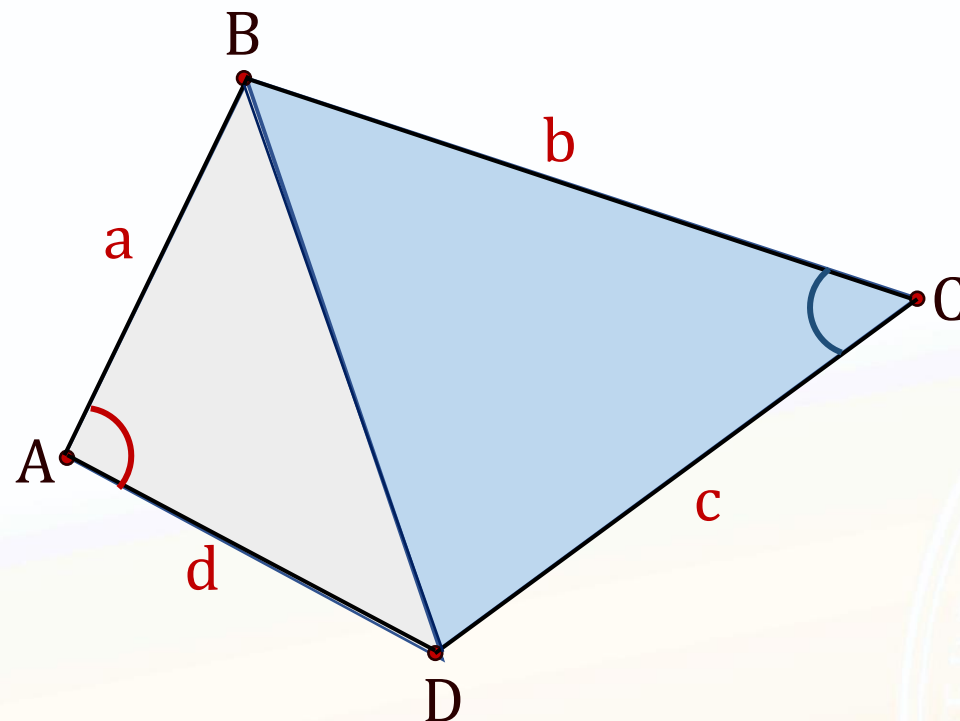
También:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \text{sen}(B) + \frac{c \cdot d}{2} \text{sen}(D)$$



Demostremos:

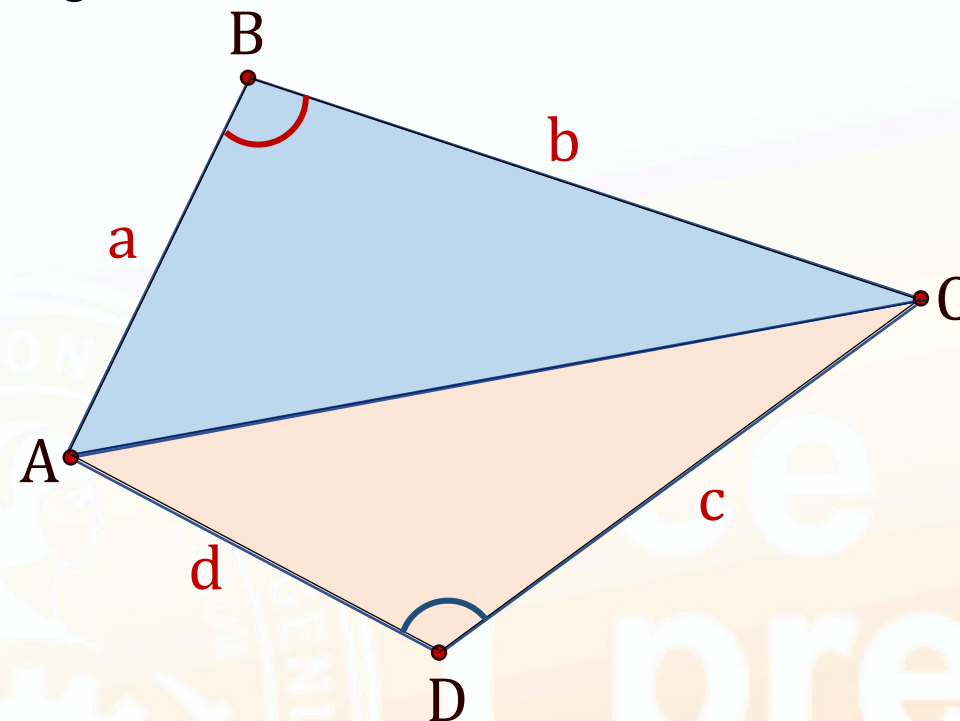
En el cuadrilátero ABCD mostrado:



$$S_{ABCD} = S = S_{ABD} + S_{BDC}$$

$$\therefore S = \frac{a \cdot d}{2} \text{sen}(A) + \frac{b \cdot c}{2} \text{sen}(C)$$

Análogamente:



$$S_{ABCD} = S = S_{ABC} + S_{ADC}$$

$$\therefore S = \frac{a \cdot b}{2} \text{sen}(B) + \frac{c \cdot d}{2} \text{sen}(D)$$

PROBLEMA 01:

En un cuadrilátero ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden 2, 2, 2 y 3 (expresados en u), respectivamente. Calcule el área de su región correspondiente en u^2 , si además $A = \text{arcsec}(3)$.

- A) 4,12 ☒ B) 4,81 C) 4,98 D) 5,12 E) 5,48

PROBLEMA 02:

En un cuadrilátero ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden $\sqrt{5}$, 4, 4 y $\sqrt{5}$ (expresados en u), respectivamente. Calcule aproximadamente, el área de su región correspondiente en u^2 , si además $m\angle A = 2m\angle C$.

- A) 6,42 B) 6,84 ☒ C) 8,80 D) 8,96 E) 9,12

A.2) 2da RELACIÓN

Utilizando las diagonales y el ángulo que forman

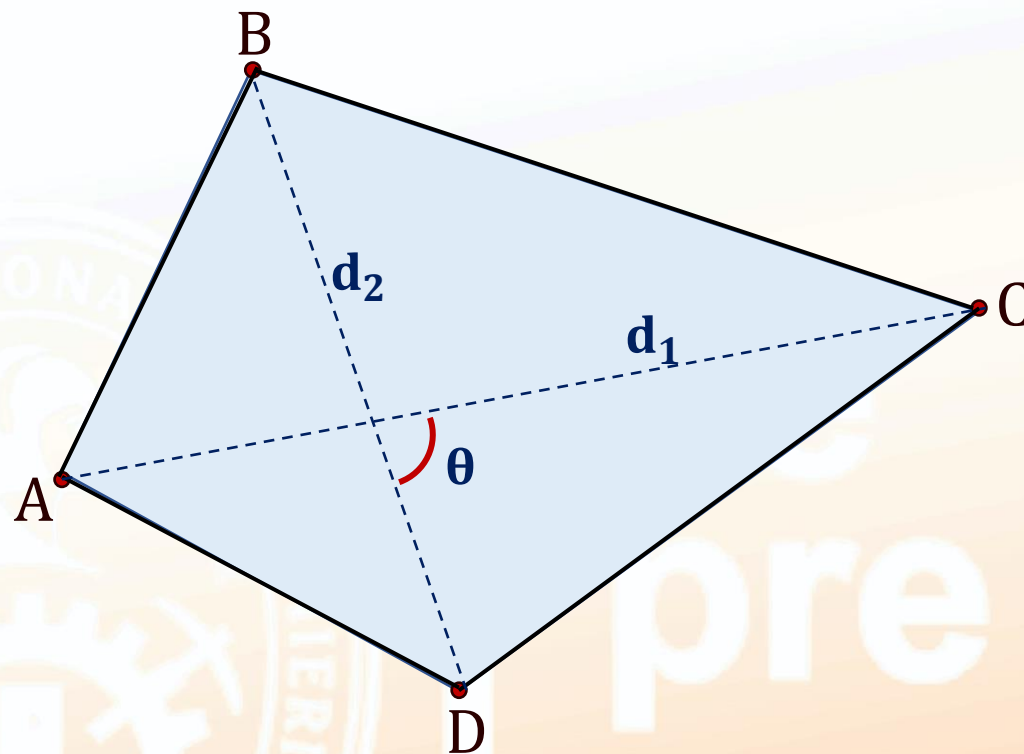
En el cuadrilátero ABCD mostrado:

Sean sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de longitudes d_1 y d_2 (expresados en u):

Las cuales forman un ángulo de medida θ :

El área **S** de su región correspondiente es igual a:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \text{sen}(\theta)$$



Demostremos:

En el cuadrilátero ABCD mostrado $AC = d_1$:

$$S_{ABCD} = S = S_{ABC} + S_{ADC}$$

$$S = \frac{d_1 \cdot h_1}{2} + \frac{d_1 \cdot h_2}{2} = \frac{d_1}{2} (h_1 + h_2) \dots (1)$$

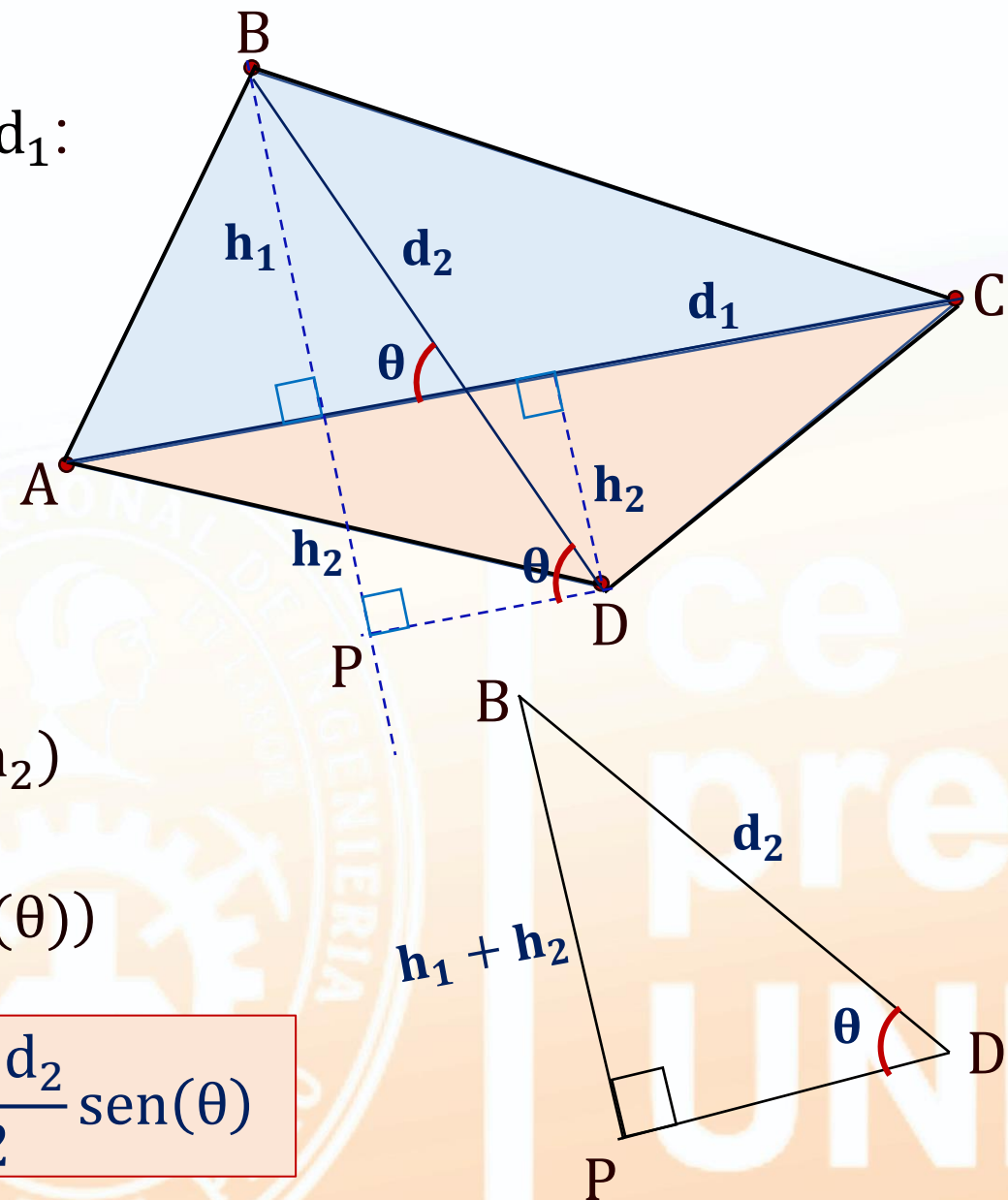
Construimos el $\triangle BPD$: $BD = d_2$

$$\text{Note que: } h_1 + h_2 = d_2 \sin(\theta) \dots (2)$$

Reemplazamos (2) en (1): $S = \frac{d_1}{2} (h_1 + h_2)$

$$\Rightarrow S = \frac{d_1}{2} (d_2 \sin(\theta))$$

$$\therefore S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(\theta)$$



En un cuadrilátero no convexo:

En el cuadrilátero ABCD mostrado:

$$S_{ABCD} = S = S_{ABC} - S_{ADC}$$

$$S = \frac{d_1 \cdot h_1}{2} - \frac{d_1 \cdot h_2}{2} = \frac{d_1}{2} (h_1 - h_2) \dots (1)$$

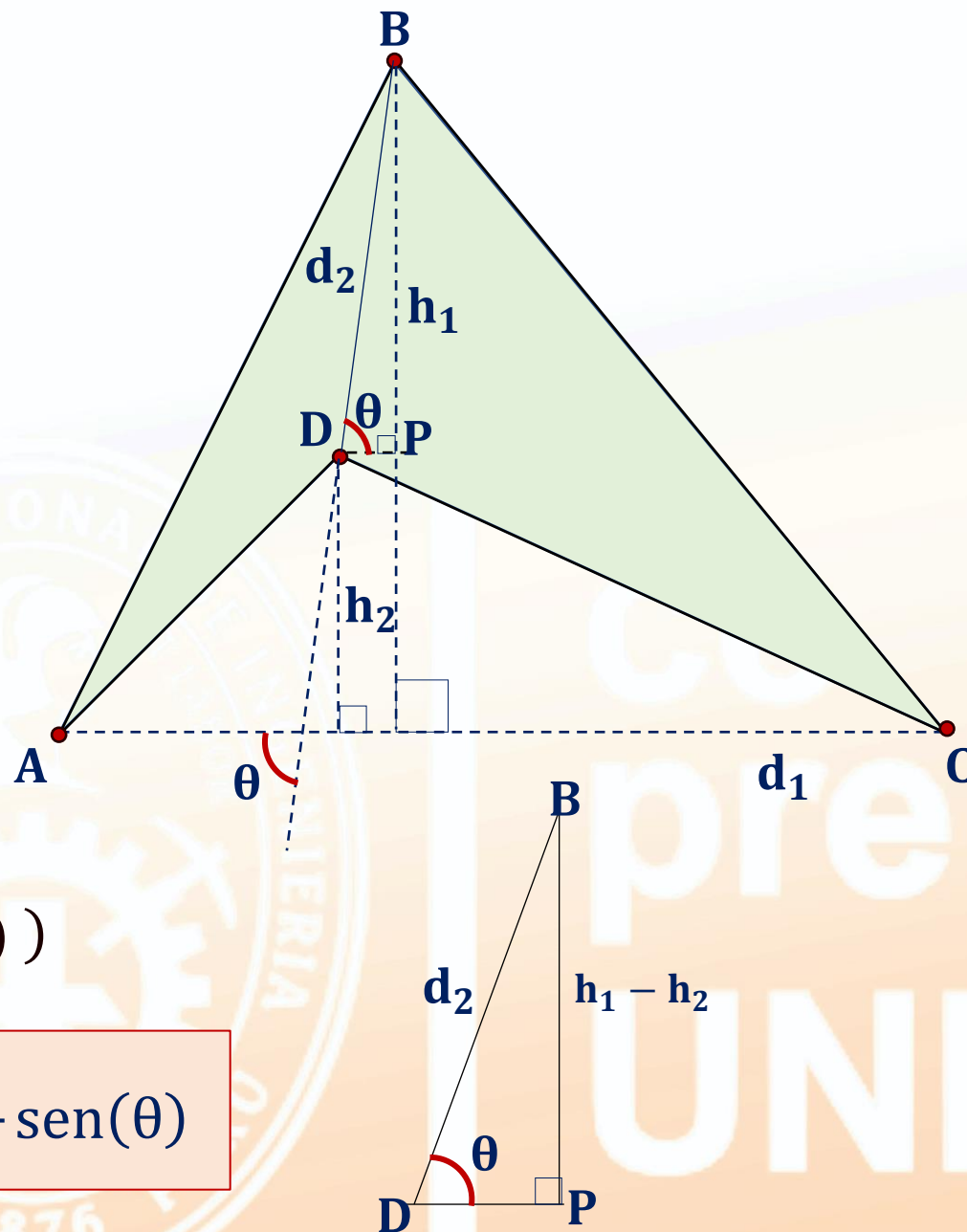
Construimos el $\triangle BPD$: $BD = d_2$

Note que: $h_1 - h_2 = d_2 \sin(\theta) \dots (2)$

Reemplazamos (2) en (1): $S = \frac{d_1}{2} (h_1 - h_2)$

$$\Rightarrow S = \frac{d_1}{2} (d_2 \sin(\theta))$$

$$\therefore S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(\theta)$$



PROBLEMA 03:

En la figura mostrada: $BE = BD$, $AF = 2u$, $FG = 4u$ y $GC = 3u$. Calcule la relación entre las áreas de las regiones cuadrangulares ABGE y BCDF.

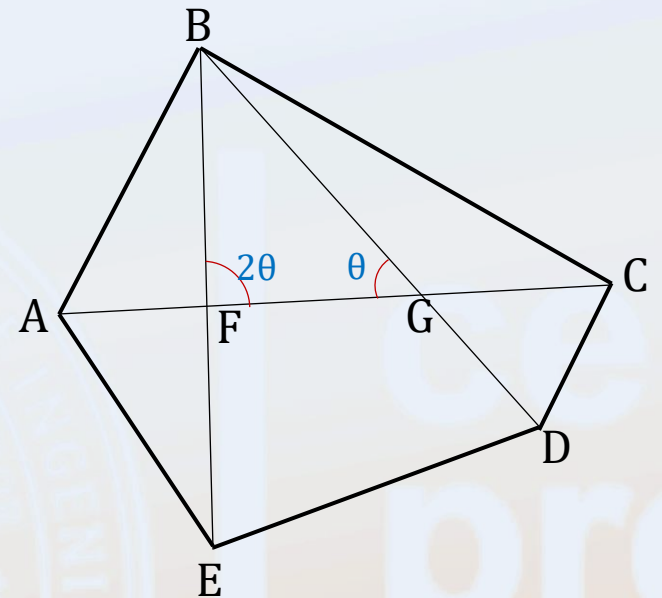
A) $\frac{12}{7} \sin(\theta)$

☒ $\frac{12}{7} \cos(\theta)$

C) $\frac{12}{5} \sin(\theta)$

D) $\frac{12}{5} \cos(\theta)$

E) $\frac{15}{7} \cos(\theta)$



PROBLEMA 04:

En la figura mostrada: $AG = 3u$, $GF = 2u$ y $FD = 5u$. Si la relación entre las áreas de las regiones cuadrangulares ABFE y ACDE es $k \tan(\beta) \tan(\theta)$; calcule el valor de k .

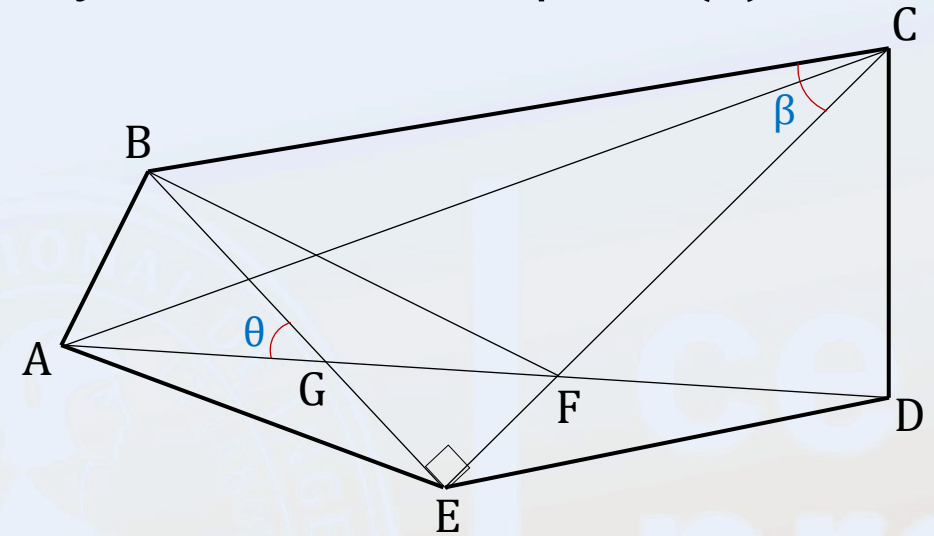
A) 0,25

☒ 0,5

C) 0,75

D) 1,25

E) 1,5



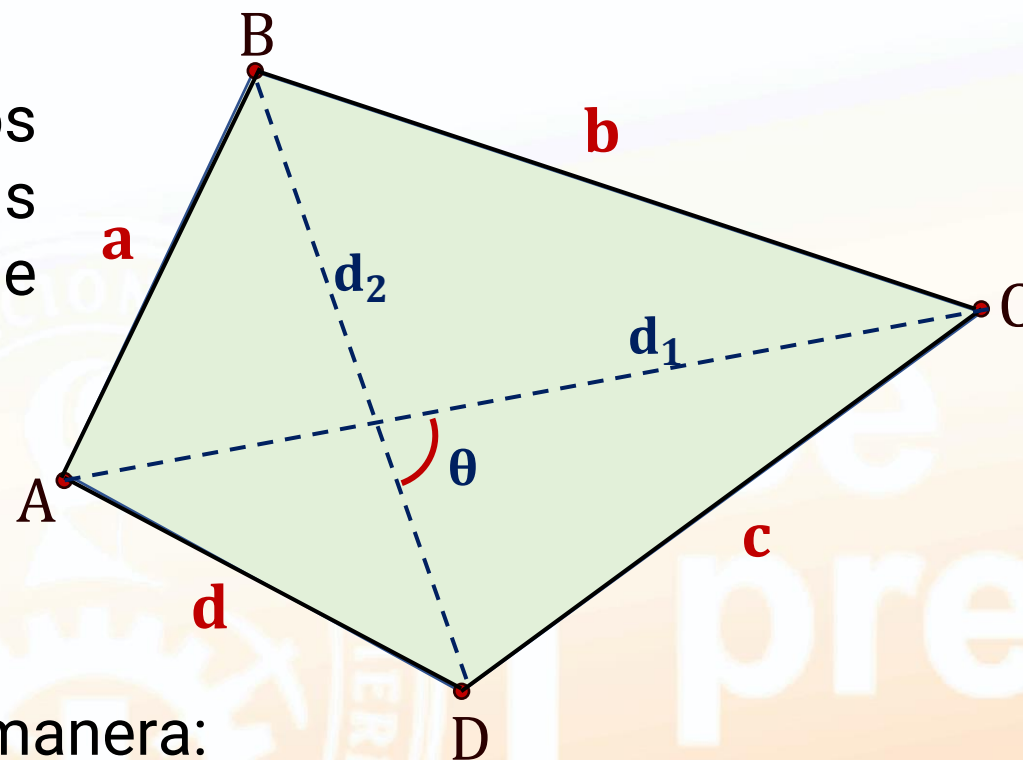
A.3) 3ra RELACIÓN

Utilizando los lados y el ángulo que forman las diagonales

En el cuadrilátero ABCD mostrado:

Si conocemos las longitudes de sus lados y la medida del ángulo que forman sus diagonales (no perpendiculares), se cumple que:

$$S = \left(\frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{4} \right) \tan(\theta)$$



También se suele colocar de la siguiente manera:

$$S = \left| \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{4} \right) \tan(\theta) \right|$$

PROBLEMA 05:

En un cuadrilátero ABCD el área de su región correspondiente es $S u^2$ y sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden $(x + 1)$, x , $(x + 2)$ y $(x + 3)$ (expresados en u), respectivamente. Calcule $\text{Scot}(\theta)$, siendo θ la medida del menor ángulo que forman sus diagonales.

- A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75 ☒ 1 E) 1,5

PROBLEMA 06:

En un cuadrilátero ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a , b , c y d (expresados en u), respectivamente. Si su perímetro es $2p u$, su área es igual a $12 u^2$ y además: $2p(2p - 2a - 2c) = 24 + 2(bd - ac)$; calcule la medida del menor ángulo que forman las diagonales.

- ☒ $\arctan(2)$ B) $\arctan(3)$ C) $\arctan(4)$ D) $\arctan(6)$ E) $\arctan(12)$

A.4) 4ta RELACIÓN

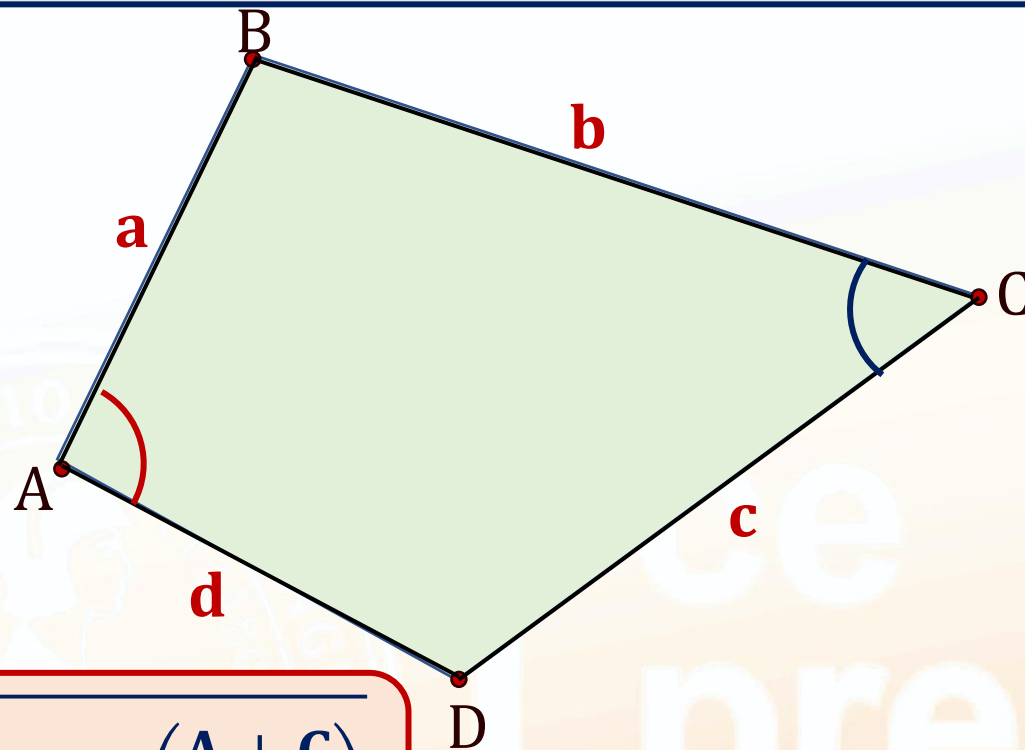
Utilizando los lados y la semisuma de dos ángulos opuestos

En el cuadrilátero ABCD mostrado:

$$\text{Si: } a + b + c + d = 2p$$

$A + C$: se conoce

El área S de dicha región se puede calcular así:



$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right)}$$

Fórmula de
Bretschneider
(1842)

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2 \left(\frac{B + D}{2} \right)}$$

PROBLEMA 07:

En un cuadrilátero ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden 3, 3, 7 y 5 (expresados en cm), respectivamente. Si el área de la región cuadrangular ABCD es $\sqrt{267}\text{cm}^2$, calcule $\sqrt{3 - 15\cos(A + C)}$

A) 1

B) 2

C) 3

☒ 4

E) 5

PROBLEMA 08:

En un cuadrilátero ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden 4, 5, 7 y 10 (expresados en cm), respectivamente. Calcule la tangente del ángulo agudo formado por sus diagonales si el área de esta región cuadrangular es máxima.

A) 1,00

B) 1,5

C) 2,00

☒ 2,4

E) 2,8

B) CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

En el cuadrilátero ABCD mostrado:

Si es inscriptible: $A + C = B + D = 180^\circ$

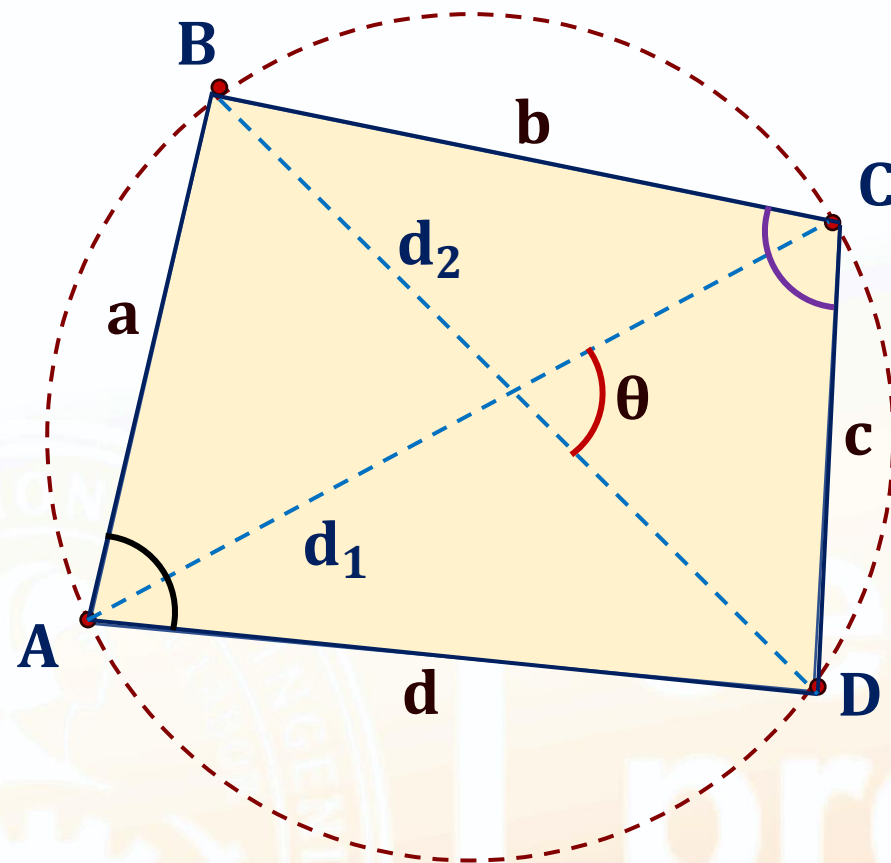
$$d_1 \cdot d_2 = a \cdot c + b \cdot d$$

Sabemos que:

$$S_{ABCD} = S = \frac{a \cdot d}{2} \text{sen}(A) + \frac{b \cdot c}{2} \text{sen}(C)$$

$$S = \frac{a \cdot d}{2} \text{sen}(A) + \frac{b \cdot c}{2} \text{sen}(A)$$

$$S = \left(\frac{a \cdot d + b \cdot c}{2} \right) \text{sen}(A)$$



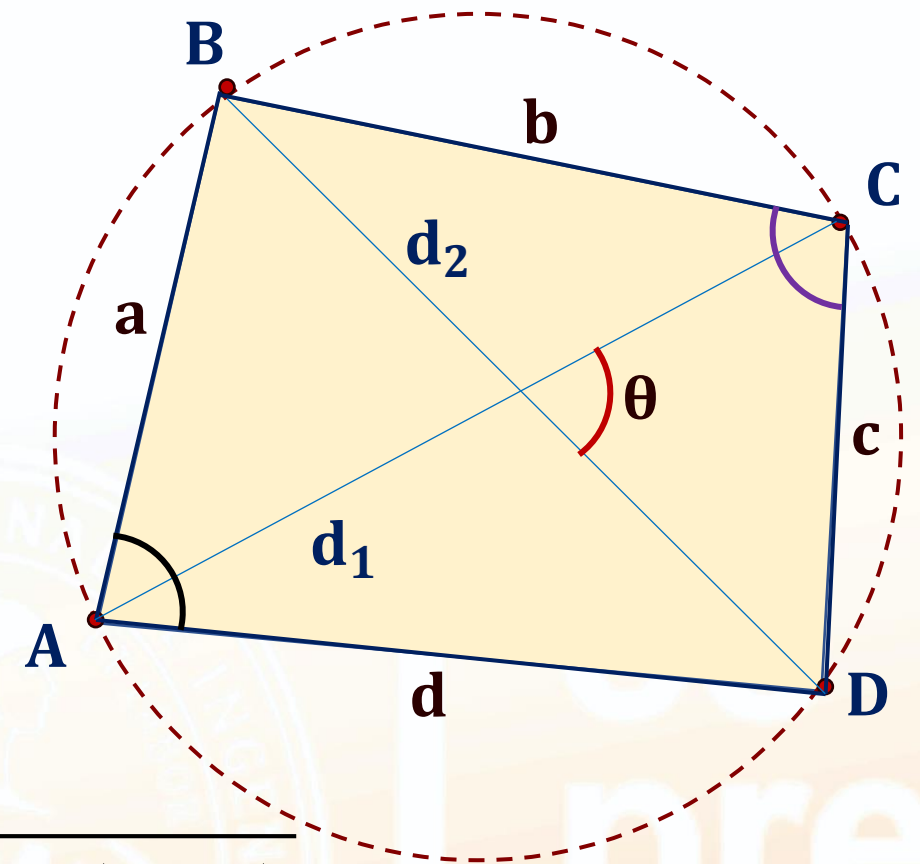
$$S = \left(\frac{a \cdot b + c \cdot d}{2} \right) \text{sen}(B)$$

Sabemos también que:

$$S_{ABCD} = S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(\theta)$$

Pero: $d_1 \cdot d_2 = a \cdot c + b \cdot d$

$$S = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{2} \right) \sin(\theta)$$



De la fórmula general:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \underbrace{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}_0}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Fórmula de Brahmagupta

PROBLEMA 09:

En un cuadrilátero inscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden 3, 1, 2 y 4 (expresados en cm), respectivamente. Calcule, aproximadamente, el valor de: $11\text{sen}(A)\text{sen}(B) + \tan(8^\circ)$

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

☒ 7

PROBLEMA 10:

En un cuadrilátero inscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden 5, 2, 3 y 8 (expresados en cm), respectivamente. Si el menor ángulo formado por sus diagonales mide θ ; calcule: $\sqrt{31 \cos(\theta)} - 8$

☒ 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

PROBLEMA 11:

Según lo mostrado en la figura, calcule el área de la región sombreada. Considere: $\tan(80^\circ) = 5,67$

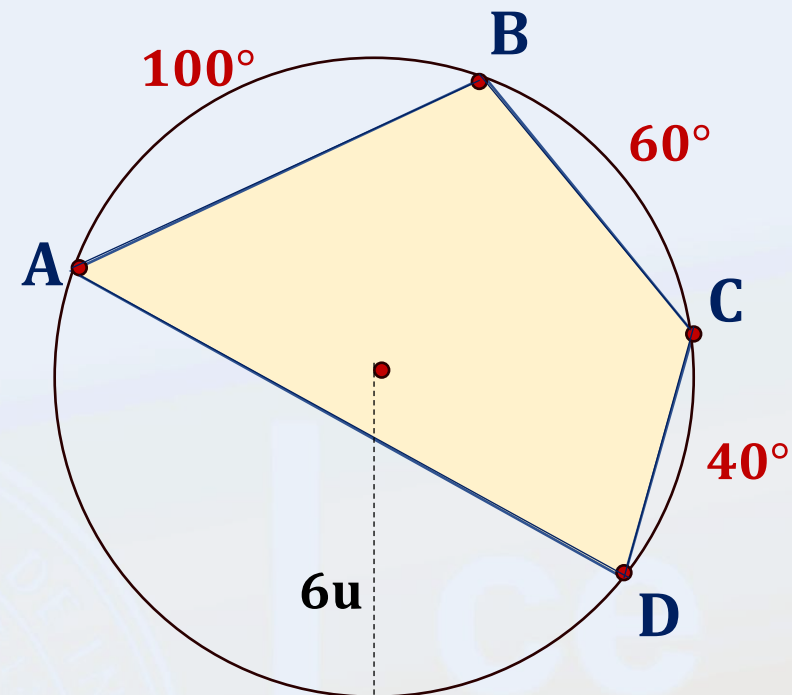
A) 34,02

B) 39,69

C) 45,36

● 51,03

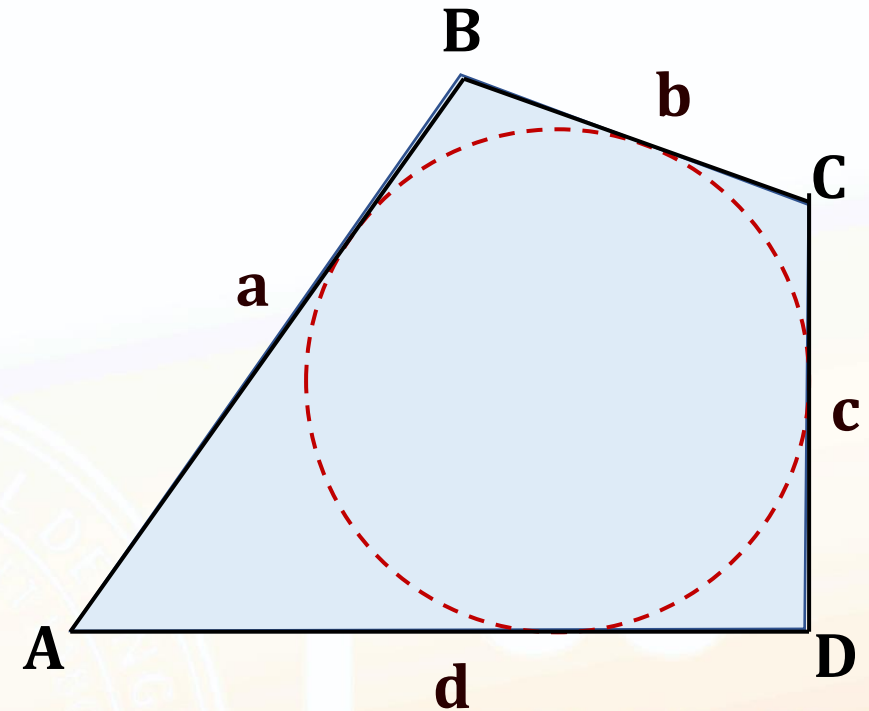
E) 68,04



C) CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE

En el cuadrilátero circunscriptible ABCD mostrado:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 2p \\ a + c = b + d = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} p - a = c \\ p - c = a \\ p - b = d \\ p - d = b \end{array}$$



Sabemos que el área **S** de la región cuadrangular es:

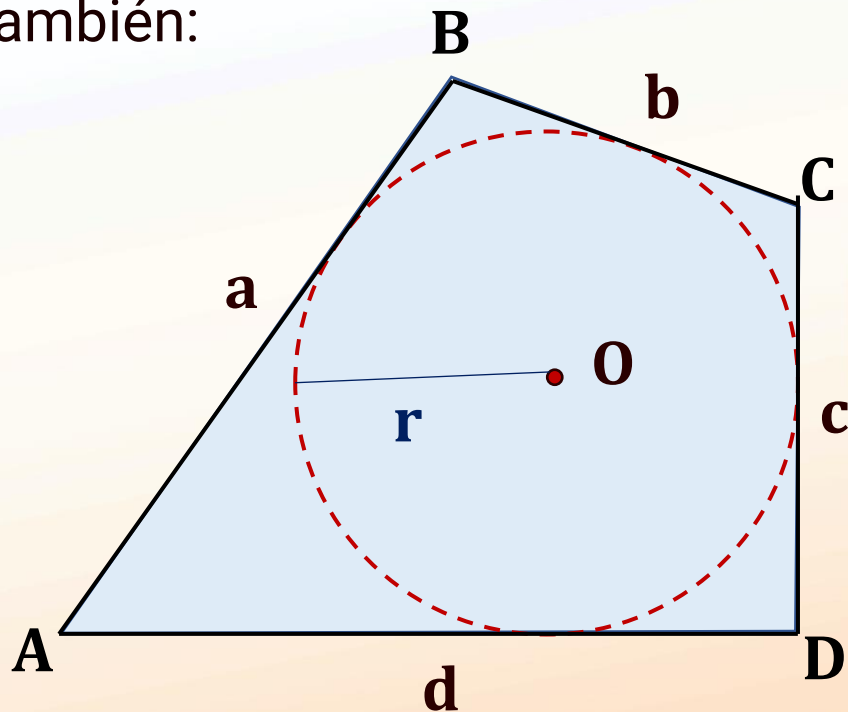
$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right)}$$

$$S = \sqrt{(c)(d)(a)(b) - a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right)} \Rightarrow S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d - a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right)}$$

Factorizando:

$$S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d \left(1 - \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right) \right)} \Rightarrow S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d \left(\sin^2 \left(\frac{A + C}{2} \right) \right)}$$

También:



$$S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \cdot \sin \left(\frac{A + C}{2} \right)$$

$$S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \cdot \sin \left(\frac{B + D}{2} \right)$$

$$S = p \cdot r$$



PROBLEMA 12:

En un cuadrilátero circunscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, y $\overline{CD}$ miden 5, 3 y 2 (expresados en cm), respectivamente. Si el área de la región cuadrangular es igual a $3\sqrt{10}\text{cm}^2$; calcule: $(\sin(7A - C) + \sin(7C - A))\sec(A + C)$

A) -2

B) -1
☒ 0

D) 1

E) 2

PROBLEMA 13:

En un cuadrilátero circunscriptible ABCD se sabe que:

$$\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right) + \cot\left(\frac{D}{2}\right) = 14;$$

además, el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero mide 5 cm, calcule el área de dicha región cuadrangular en cm^2 .

A) 210

B) 280

☒ 350

D) 420

E) 700

D) CUADRILÁTERO BICÉNTRICO

En el cuadrilátero bicéntrico ABCD mostrado:

Inscriptible: $A + C = 180^\circ$

Circunscriptible: $a + c = b + d = p$

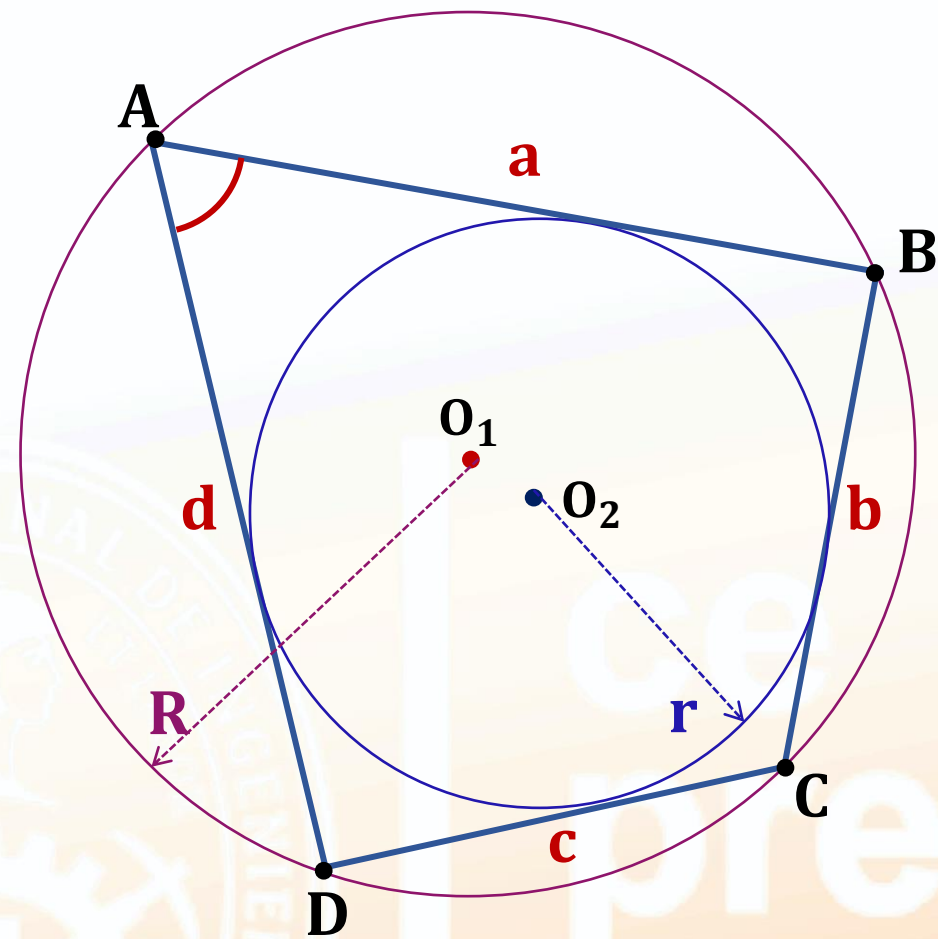
Por ser circunscriptible, el área S de su región es:

$$S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \cdot \sin\left(\frac{A + C}{2}\right)$$

Por ser inscriptible, el área S quedaría así:

$$S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \cdot \sin(90^\circ)$$

$$S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$





PROBLEMA 14: (Ejercicio 197 del 2do material)

En un cuadrilátero bicéntrico ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden $(x - 1)$, $(2x)$, $(3x + 1)$ y $(x + 3)$ respectivamente, expresados en cm. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita en dicho cuadrilátero.

A) $\sqrt{3}$

☒ $\sqrt{5}$

C) $\sqrt{7}$

D) $\sqrt{11}$

E) $\sqrt{13}$

PROBLEMA 15:

En un cuadrilátero bicéntrico ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a , b , c y d respectivamente, expresados en u. Si el menor ángulo formado por las diagonales mide 30° ; calcule el valor de la expresión k definida por:

$$k = \sqrt{\frac{ac}{bd}} + \sqrt{\frac{bd}{ac}}$$

A) 2

B) $2\sqrt{3}$

☒ 4

D) $4\sqrt{3}$

E) 8

IDENTIDADES ADICIONALES EN UN CUADRILÁTERO

A) CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

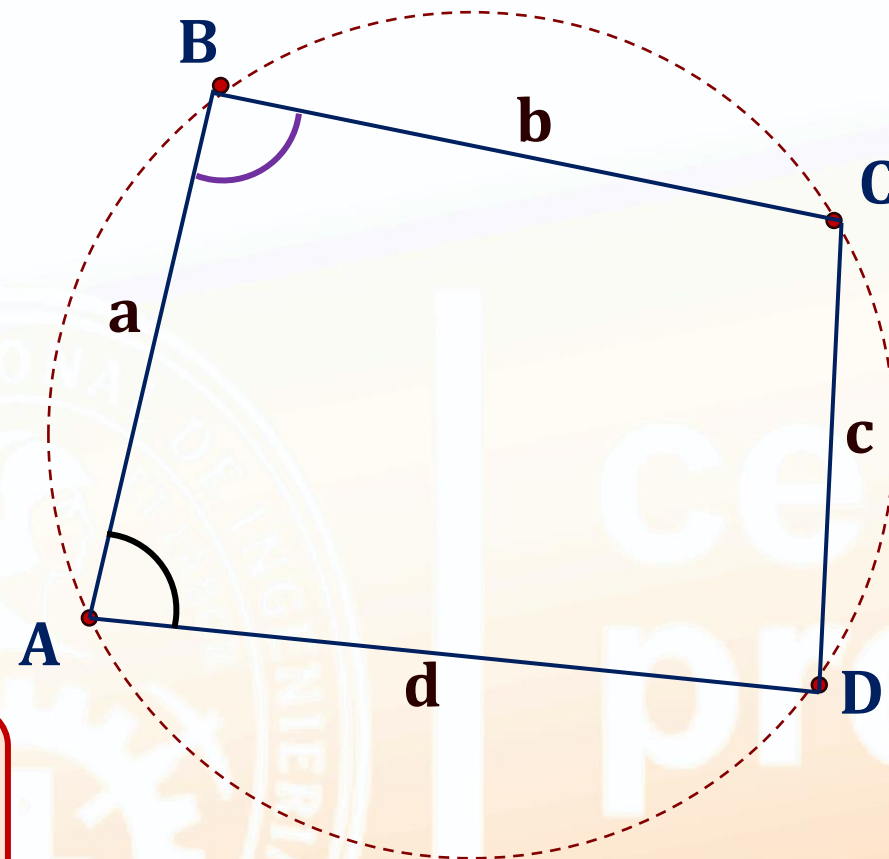
A.1) TEOREMA DE COSENOS

En el cuadrilátero ABCD mostrado:

Se cumple que:

$$\cos(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c}$$

$$\cos(B) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2a \cdot b + 2c \cdot d}$$



Note además que:

$$\cos(C) = -\cos(A)$$

$$\cos(D) = -\cos(B)$$

Demostremos:

De la figura:

$$\Delta ABD: (BD)^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos(A)$$

$$\Delta BCD: (BD)^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(\pi - A)$$

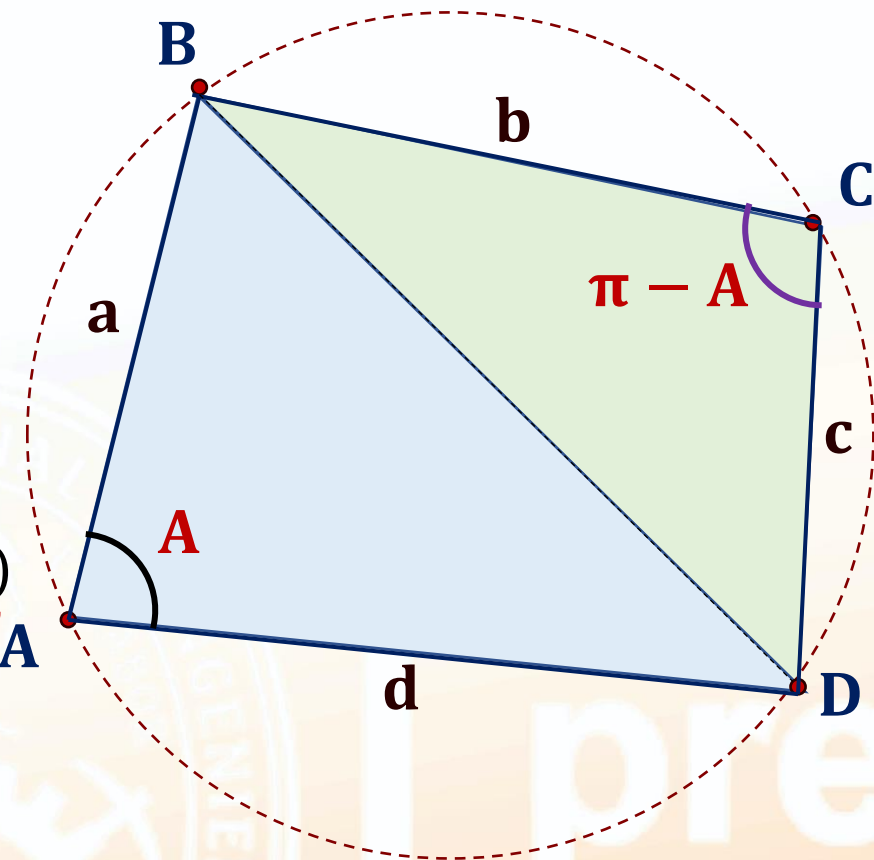
Igualando:

$$a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos(A) = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \underbrace{\cos(\pi - A)}_{-\cos(A)}$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2a \cdot d \cdot \cos(A) + 2b \cdot c \cdot \cos(A)$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = \cos(A)(2a \cdot d + 2b \cdot c)$$

$$\therefore \cos(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c}$$



PROBLEMA 16:

En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$ sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a , b , c y d respectivamente, expresados en u . Si $\cos(A) = -0,75$; además se verifica que: $(a - d)^2 - (b - c)^2 = m(ad) + n(bc)$; calcule: $n - m$

A) 1

B) 2

C) 3

☒ 4

E) 5



A.2) CÁLCULO DE SEMIÁNGULOS

$$\text{Dado que: } \cos(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c} \Rightarrow 1 - \cos(A) = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2a \cdot d + 2b \cdot c - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c} = \frac{\overbrace{b^2 + c^2 + 2b \cdot c}^{(b+c)^2} - \overbrace{(a^2 + d^2 - 2a \cdot d)}^{(a-d)^2}}{2a \cdot d + 2b \cdot c}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c} = \frac{\overbrace{(b+c+a-d)}^{2p-2d} \overbrace{(b+c-a+d)}^{2p-2a}}{2a \cdot d + 2b \cdot c}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(p-a)(p-d)}{a \cdot d + b \cdot c}$$

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$$

Dado que: $A + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

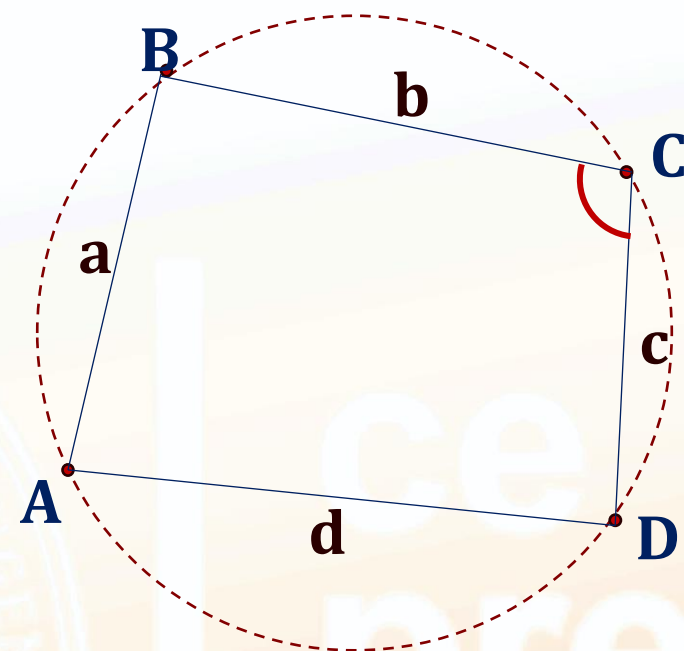
Pero como: $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$

$$\sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$$

Además:

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$



De esta manera:

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$$

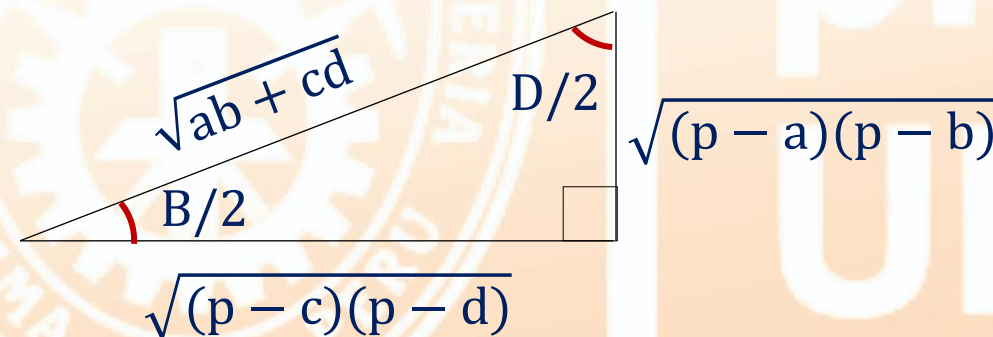
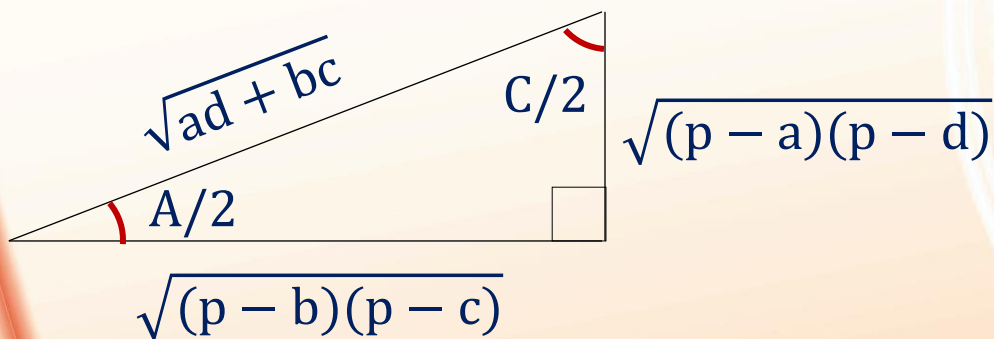
$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{a \cdot b + c \cdot d}}$$

$$\cos\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{a \cdot b + c \cdot d}}$$

$$\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}$$



PROBLEMA 17: (pregunta 190 del 2do material)

Sea el cuadrilátero inscriptible ABCD de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ de longitudes a, b, c y d respectivamente, expresados en u . Si el área de la región cuadrangular es S (en u^2) y p es el semiperímetro, calcule el equivalente de:

$$S \tan \left(\frac{B}{2} \right)$$

A) $\frac{(p - a)^3}{(p - b)}$

B) $\frac{(p - b)^3}{(p - a)}$

C) $(p - b)(p - d)$

D) $(p - c)(p - a)$

☒ $(p - a)(p - b)$

A.3) RELACIÓN ENTRE LAS COTANGENTES Y EL ÁREA DE LA REGIÓN CUADRANGULAR

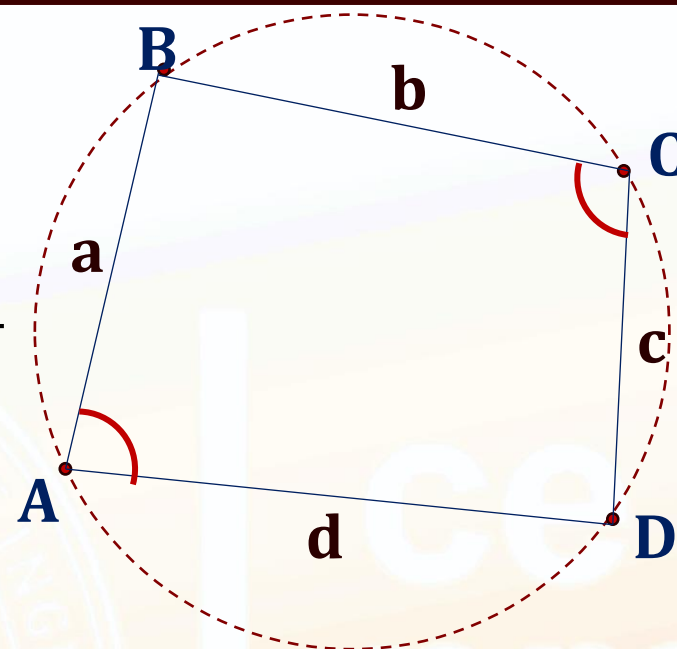
Dado que: $\cos(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2a \cdot d + 2b \cdot c}$

Además: $S = \left(\frac{a \cdot d + b \cdot c}{2} \right) \sin(A) \Rightarrow a \cdot d + b \cdot c = \frac{2S}{\sin(A)}$

$$\Rightarrow \cos(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 \left(\frac{2S}{\sin(A)} \right)}$$

$$\Rightarrow \cos(A) = \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) \sin(A)}{4S}$$

$$\cot(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4S}$$



De lo anterior:

$$\cot(A) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4S}$$

$$\cot(B) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{4S}$$

$$\cot(A) + \cot(B) = \frac{a^2 - c^2}{2S}$$

$$\cot(A) - \cot(B) = \frac{d^2 - b^2}{2S}$$

$$\frac{\cot(A) + \cot(B)}{\cot(A) - \cot(B)} = \frac{a^2 - c^2}{d^2 - b^2} = \frac{\text{sen}(B + A)}{\text{sen}(B - A)}$$



PROBLEMA 18:

En un cuadrilátero inscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a , b , c y d respectivamente, expresados en u . Si $\cot(B) = 4\cot(C)$; calcule:

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}$$

A) 0,2

B) 0,3

C) 0,4

D) 0,5

☒ 0,6

PROBLEMA 19:

En un cuadrilátero inscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a , b , c y d respectivamente, expresados en u . Si se cumple que:

$$\cot(A) + 2 \cot(B) = \frac{b^2 - d^2}{6S}; \text{ siendo } S \text{ el área de la región cuadrangular, en } u^2.$$

Calcule: $\frac{b^2 - d^2}{a^2 - c^2}$

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

☒ 9

B) CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE

En el cuadrilátero circunscriptible ABCD: $a + c = b + d$

$$\Delta ABD: (BD)^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos(A)$$

$$\Delta BCD: (BD)^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(C)$$

Iguando:

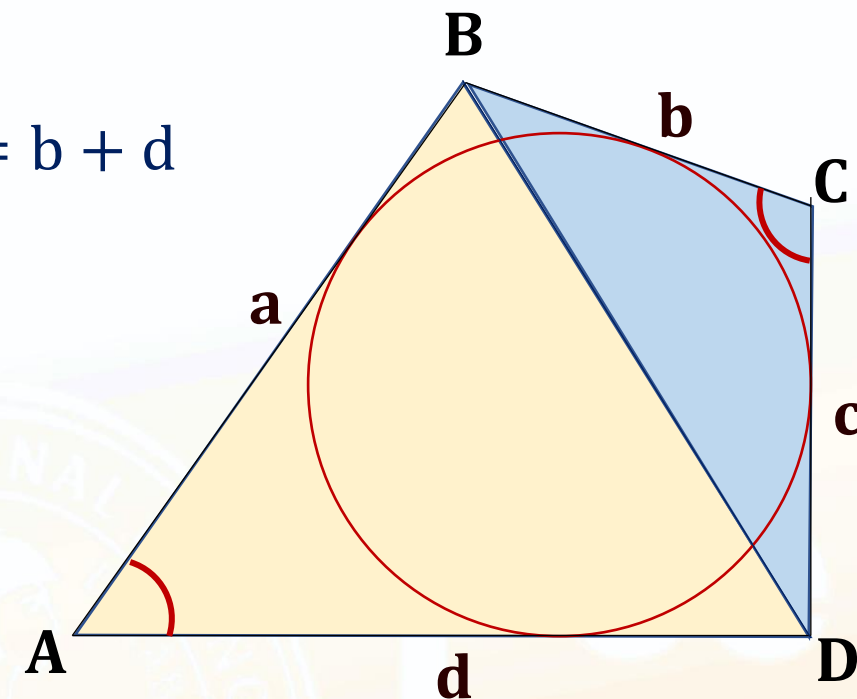
$$a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos(A) = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(C)$$

$$\underbrace{a^2 + d^2 - 2a \cdot d}_{(a-d)^2} + 2a \cdot d - 2a \cdot d \cdot \cos(A) = \underbrace{b^2 + c^2 - 2b \cdot c}_{(b-c)^2} + 2b \cdot c - 2b \cdot c \cdot \cos(C)$$

Quedaría: $2a \cdot d[1 - \cos(A)] = 2b \cdot c[1 - \cos(C)]$

$$2a \cdot d \left(2\sin^2 \left(\frac{A}{2} \right) \right) = 2b \cdot c \left(2\sin^2 \left(\frac{C}{2} \right) \right)$$

$$\frac{\sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\sin \left(\frac{C}{2} \right)} = \sqrt{\frac{b \cdot c}{a \cdot d}}$$





PROBLEMA 20:

En un cuadrilátero circunscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ miden 5, 4 y 6 respectivamente, expresados en u. Calcule el valor de:

$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right) \sin\left(\frac{D}{2}\right)}$$

A) 0,83

☒ 1,2

C) 1,25

D) 1,4

E) 1,6

PROBLEMA 21:

En un cuadrilátero circunscriptible ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a, b, c y d (expresados en u), respectivamente. Si la medida del ángulo C es el doble de A, además: $16(b \cdot c) = 5(a \cdot d)$; calcule: $\cos(A)$.

A) 0,25

B) 0,36

C) 0,48

☒ 0,6

E) 0,8

C) CUADRILÁTERO BICÉNTRICO

En el cuadrilátero bicéntrico ABCD:

Como es circunscriptible: $\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} = \sqrt{\frac{b \cdot c}{a \cdot d}}$

Como es inscriptible: $\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \sqrt{\frac{b \cdot c}{a \cdot d}}$

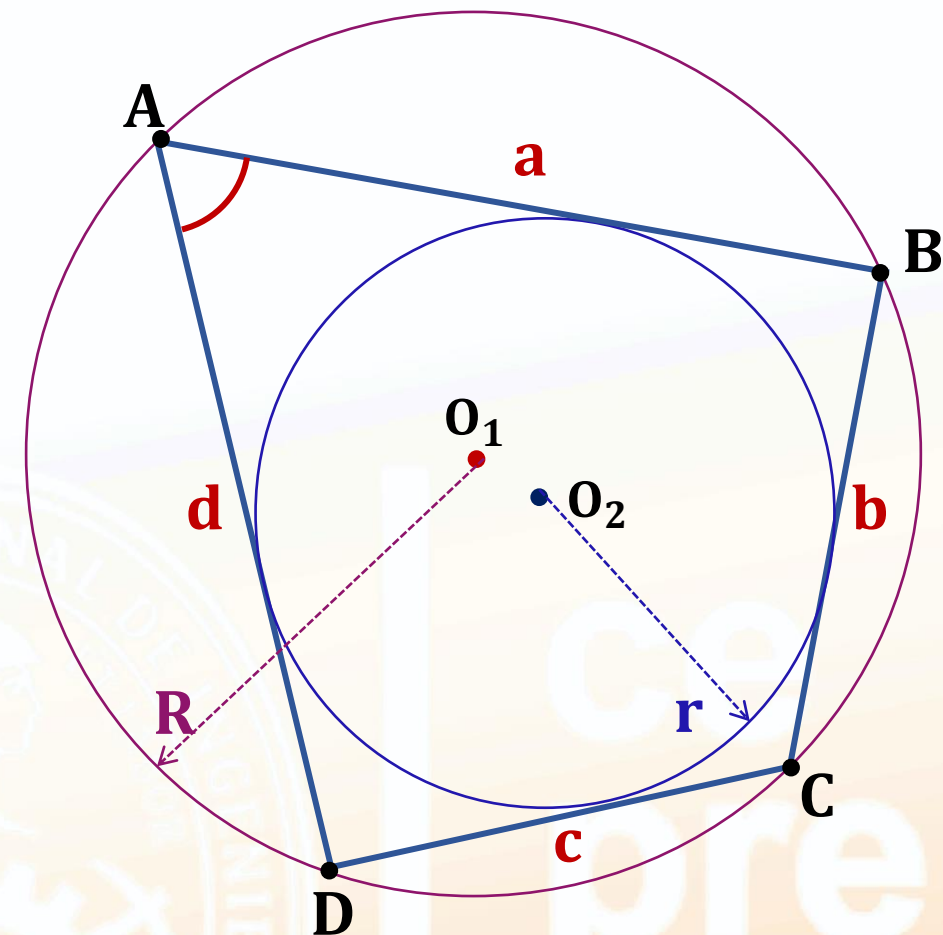
$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{b \cdot c}{a \cdot d}}$$

Análogamente:

$$\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{c \cdot d}{a \cdot b}}$$

Además:

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{c}{a}$$



PROBLEMA 22:

En un cuadrilátero bicéntrico ABCD el ángulo D mide 60° . Calcule la relación entre las áreas de las regiones triangulares ABC y ADC.

- A) $1/6$ ☒ $1/3$ C) $1/2$ D) $2/3$ E) $4/3$

PROBLEMA 23:

En un cuadrilátero bicéntrico ABCD sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden a , b , c y d (expresados en u), respectivamente. Si el perímetro del cuadrilátero es igual a $20u$; calcule:

- $c \left(b \cdot \csc^2 \left(\frac{A}{2} \right) + d \cdot \csc^2 \left(\frac{B}{2} \right) \right)$
- A) 40 B) 80 ☒ 100
 D) 150 E) 200

Muy bien jóvenes, ahora les toca resolver los ejercicios de sus materiales adicionales con la confianza en que cada docente estará llano a colaborar con tus inquietudes y juntos resolverlas...recuerda que cada día tienes la oportunidad de mejorar lo que hiciste el día anterior...